Analisi Matematica

Pisa, 3 novembre 2023

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{2}{x-1}}$ determinandone in particolare gli estremi superiore e inferiore, gli eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti e la convessità.

Soluzione

La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calcoliamo i limiti al bordo dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

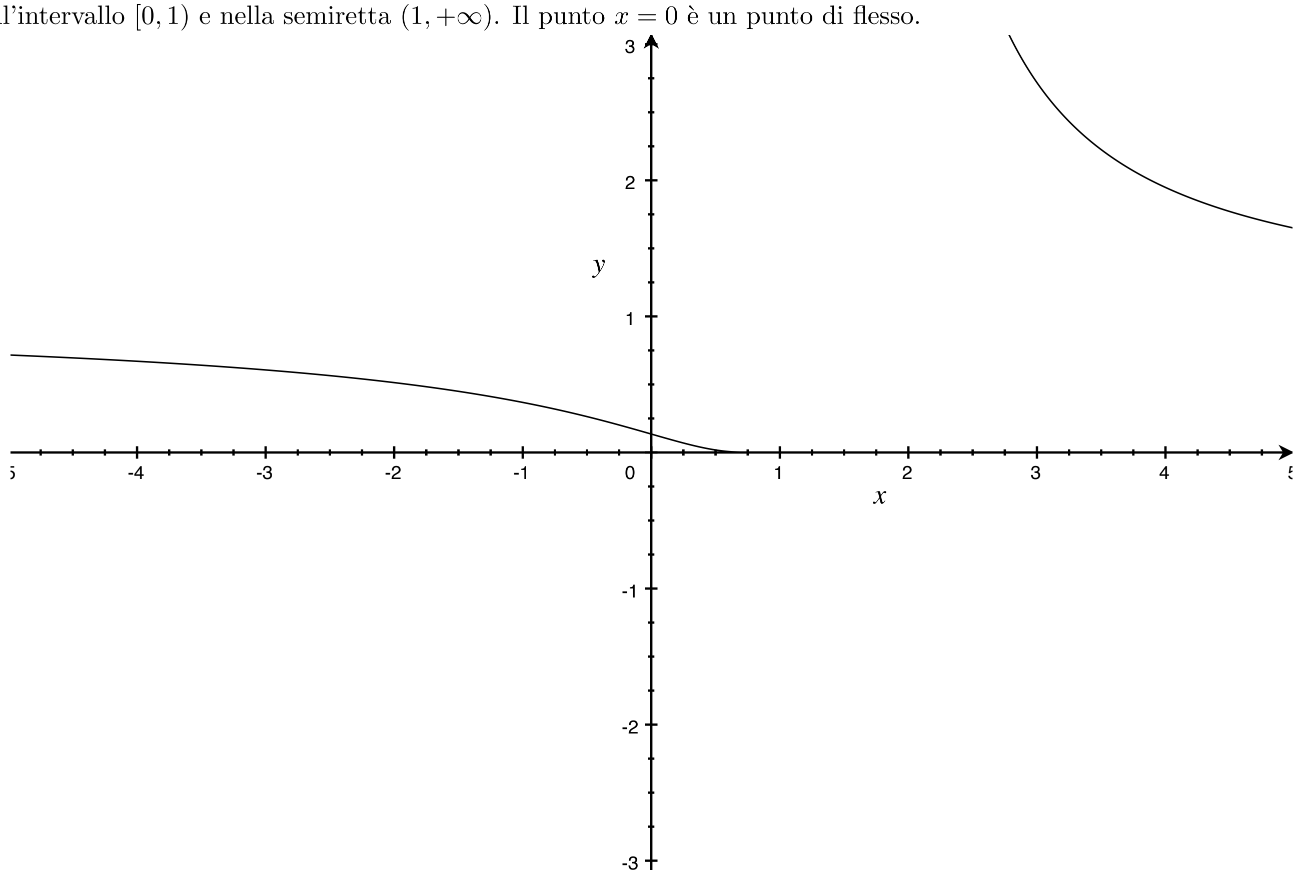
Avremo quindi un asintoto orizzontale $y = 1$ e uno verticale $x = 1$. Osserviamo ora che $f(x) > 0$ per ogni x, e questo, insieme al fatto che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ ci assicura che $\inf f = 0$. Invece da $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ si ha che $\sup f = +\infty$. Vediamo ora se ci sono massimi o minimi locali. La f è definita su un insieme aperto ed è derivabile in ogni punto, quindi in un eventuale punto di max o min locale dovrà essere $f' = 0$. Calcoliamo f':

$$f'(x) = \frac{-2e^{\frac{2}{x-1}}}{(x-1)^2} < 0 \qquad \forall x \neq 1.$$

Ne segue che non ci sono max o min locali, quindi neanche assoluti. La funzione risulta decrescente nelle semirette $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$. Per la convessità calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{4xe^{\frac{2}{x-1}}}{(x-1)^4}.$$

Risulta quindi $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$. Ne segue che f è concava nella semiretta $(-\infty, 0]$, convessa nell'intervallo $[0, 1)$ e nella semiretta $(1, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è un punto di flesso.



Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\cos x}{1 + 2\sin x - \cos^2 x}\, dx$$

Soluzione

$$\int \frac{\cos x}{1 + 2\sin x - \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x}\, dx$$

eseguendo la sostituzione $\sin x = t$ si ottiene:

$$\int \frac{dt}{t^2 + 2t} = \int \frac{dt}{(t+2)t}$$

L'integranda è una funzione razionale. Cerchiamo quindi due numeri A e B tali che

$$\frac{1}{t^2 + t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2}.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$. Quindi

$$\int \frac{dt}{(t+2)t} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+2}\right) = \frac{1}{2}(\log|t| - \log|t+2|) + c = \frac{1}{2}\left(\log|\sin x| - \log|2 + \sin x|\right) + c.$$

Esercizio 3 Calcolare il limite della seguente successione:

$$a_n = \frac{\log(n!)}{n^2}$$

Soluzione

Utilizzando la maggiorazione $n! \leq n^n$ si ottiene che

$$0 \leq \frac{\log(n!)}{n^2} \leq \frac{\log(n^n)}{n^2} = \frac{n\log n}{n^2} = \frac{\log n}{n}$$

ed essendo $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, il teorema dei carabinieri ci garantisce che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.